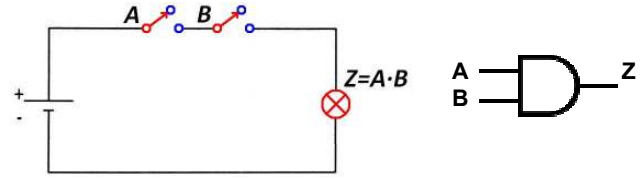


3. BOOLE CEBRİ

1854 yılında matematikçi ve filozof George Boole, mantığın sistematik olarak incelenmesi için şimdi Boole cebri dediğimiz bir cebir sistemi geliştirdi. Sonra 1938 yılında C. E. Shannon, anahtarlama cebri denilen iki-değerlikli bir Boole cebri geliştirdi; iki kararlı elektrik anahtarlama devrelerinin bu cebirle temsil edilebileceğini gösterdi. Boole cebrinin biçimsel tanımı için E. V. Huntington tarafından 1904 yılında formüle edilen önermeleri kullanacağız. Bu önermeler veya aksiyomlar, Boole cebrinin tanımlanmasında kullanılan tek önermeler değildir. Başka önerme kümeleri de kullanılmıştır. Boole cebri; Huntington önermelerinin yerine getirilmesi koşuluyla bir $B=(\text{doğru, yanlış})$ elemanları kümesi üzerinde VE (AND $\cdot$), VEYA (OR $+$) ve DEĞİL (NOT, $\bar{}$ veya $'$) olmak üzere ikili işlemcilerle tanımlanan bir cebir yapısıdır.

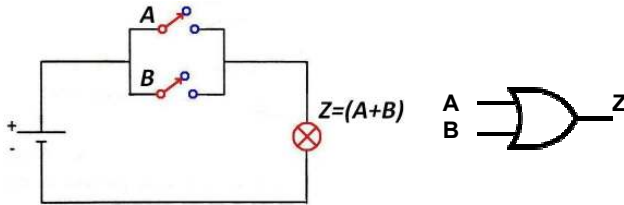


Şekil 3-1 VE işleminin anahtar devrelerindeki karşılığı

Anahtarların durumu, kapalıysa *Doğru* $A=1$, açıkta *Yanlış* $A=0$ alınır. A ve B anahtarlarının birleşimleri bir tablo şeklinde gösterilebilir.

Tablo 3-1 VE(AND) işlemi, sembolü $\{ \cdot \}$

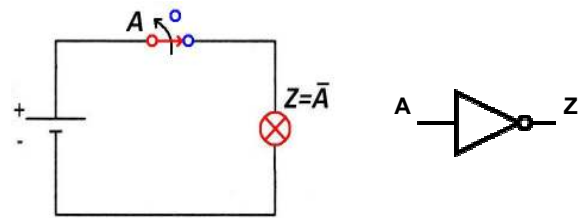
A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Şekil 3-2 VEYA işleminin anahtar devrelerindeki karşılığı

Tablo 3-2 VEYA(OR) işlemi, sembolü $\{ + \}$

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

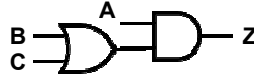
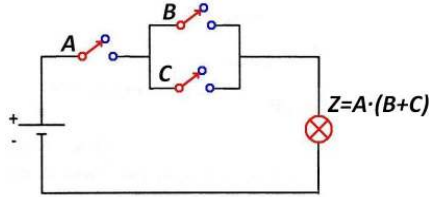


Şekil 3-3 DEĞİL işleminin anahtar devrelerindeki karşılığı

Tablo 3-3 DEĞİL(NOT) işlemi, sembolü $\{ \bar{} \}$ veya $\{ ' \}$

A	Z
0	1
1	0

DEĞİL işlemi VE işleminden daha önceliklidir. VE işlemi ise VEYA işleminden daha önceliklidir.



Boole cebri ifadelerinin içindeki değişkenlerin bütün olasılıklarına karşılık aldığı değerlerin gösterildiği tabloya **“doğruluk tablosu”** adı verilir. Bu ad, sembolik mantıksal işlemlerde değişkenler için kullanılan “doğru” ve “yanlış” durumları nedeniyle verilmiştir.

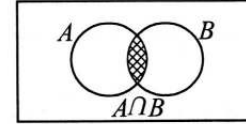
C	B	A	B+C	Z
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Tablo 3-4 $Z = A \cdot (B + C)$ İşlemi için doğruluk tablosu

3.1. Küme Kavramı

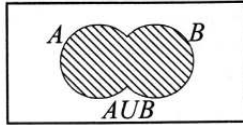
- Küme, en az bir ortak özelliği bulunan elemanlar topluluğuna denir.
- Kümeler üzerindeki işlemler aynı zamanda Boole Cebri'nin işlemlerini de gerçekleştirir.
- Kümelerin kesişim, birleşim ve tümlenme işlemleri; Boole Cebri'nde sırasıyla VE, VEYA ve DEĞİL işlemlerine birebir karşılık düşer.

3.1.1. Kümeler Cebri Kesişim



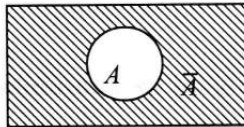
Kümelerin Kesişmesi işleminin Venn diyagramı gösterilimi

3.1.2. Kümeler Cebri Birleşim



Kümelerin Birleşim işleminin Venn diyagramı gösterilimi

3.1.3. Kümeler Cebri Tümlenme



Bir kümenin Tümlenmesi işleminin Venn Diyagramı

3.1.4. Kümeler Cebri Diğer İşlemler

Kümeler cebri, A kümesinin elemanlarıyla bu kümenin tümleyeninin oluşturduğu elemanların birleşiminden oluşan küme “Evrensel Küme” olarak adlandırılır ve “1” ile gösterilir.

$$A + \bar{A} = 1$$

Bir kümeye ait olan elemanlarla o küme dışındaki elemanların birleşimi yine evrensel kümeyi tanımlar.

Bir kümeyle, aynı kümenin tümleyeninin kesişimi “Boş Küme” olarak adlandırılır ve “0” ile gösterilir.

$$A \cdot \bar{A} = 0$$

Evrensel küme bütün elemanlardan oluştuğu için, bu kümeyle herhangi bir kümenin birleşimi yine evrensel kümedir.

$$1 + A = 1$$

Evrensel kümenin herhangi bir kümeyle kesişimi ise yine aynı o kümedir.

$$1 \cdot A = A$$

Boş kümenin hiçbir elemanı olmadığı için, bu kümeyle herhangi bir kümenin birleşimi yine aynı o evrensel kümedir.

$$0 + A = A$$

Boş kümenin herhangi bir kümeyle kesişimi ise yine boş kümedir.

$$0 \cdot A = 0$$

3.2. Boole Cebriinin Aksiyom ve Teoremleri

Boole cebri kullanılarak yapılan işlemlerde doğru olarak kabul edilen (aksiyom) ve doğruluğu ispatlanabilen (teorem) önermeler olmak üzere iki temel kural dizisi vardır.

3.2.1. Boole Cebriinin Aksiyomları

"0" ve "1" ikilisinden oluşan bir kümeye "+" ve "." işlemleri uygulandığında Her bir değişken, "0" ya da "1" değerinden sadece birini alabilir. $A = \{0,1\}$

Boole Cebriinin Aksiyomları

- 1)
 - a) Değişken "0" değerini almıyorsa, değeri "1" olur. $A \neq 0 \Rightarrow A=1$
 - b) Değişken "1" değerini almıyorsa, değeri "0" olur. $A \neq 1 \Rightarrow A=0$
- 2)
 - a) Birbirine VEYA işlemiyle bağlı olan iki önermenin ikisi doğru ise birleşik önerme doğrudur. $1 + 1 = 1$
 - b) Birbirine VE işlemiyle bağlı olan iki önermenin ikisi yanlış ise birleşik önerme yanlıştır. $0 \cdot 0 = 0$
- 3)
 - a) Birbirine VEYA işlemiyle bağlı olan iki önermenin ikisi yanlış ise birleşik önerme yanlıştır. $0 + 0 = 0$
 - b) Birbirine VE işlemiyle bağlı olan iki önermenin ikisi doğru ise birleşik önerme doğrudur. $1 \cdot 1 = 1$
- 4)
 - a) Birbirine VEYA işlemiyle bağlı olan iki önermenin biri doğru, diğeri yanlış ise birleşik önerme doğrudur. $1 + 0 = 1$
 - b) Birbirine VE işlemiyle bağlı olan iki önermenin biri doğru, diğeri yanlış ise birleşik önerme yanlıştır. $0 \cdot 1 = 0$

3.2.2. Boole Cebriinin Yasa ve Teoremleri

Temel Teoremler:

- | | | |
|-------------------------------|---|---|
| 1) Etkisizlik Özelliği | $0 + a = a$ | $1 \cdot a = a$ |
| 2) Yutan Sabit Özelliği | $1 + a = 1$ | $0 \cdot a = 0$ |
| 3) Değişkende Fazlalık Yasası | $a + a = a$ | $a \cdot a = a$ |
| 4) İşlemde Fazlalık Yasası | $\overline{\overline{a}} = a$ | $\overline{(\overline{a})} = a$ |
| 5) Tümeleme Yasası | $a + \overline{a} = 1$ | $a \cdot \overline{a} = 0$ |
| 6) Değişme Yasası | $a + b = b + a$ | $a \cdot b = b \cdot a$ |
| 7) Birleşme Yasası | $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$ | $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ |
| 8) Dağılıma Yasası | $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$ | $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ |

Basitleştirme Teoremleri:

- 9) $a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a$ $(a + b) \cdot (a + \overline{b}) = a$
- 10) $a + a \cdot b = a$ $a \cdot (a + b) = a$
- 11) $(a + \overline{b}) \cdot b = a \cdot b$ $a \cdot \overline{b} + b = a + b$
- 12) DeMorgan Yasaları

$$\overline{(a + b + c + \dots)} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \dots$$

$$\overline{(a \cdot b \cdot c \cdot \dots)} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \dots$$

Diğer Teoremler:

- 13) Çift ifadeler (Duality)

$$(a + b + c + \dots)^D = a \cdot b \cdot c \cdot \dots$$

$$(a \cdot b \cdot c \cdot \dots)^D = a + b + c + \dots$$
- 14) Çarpımların Toplamı ve Toplamların Çarpımı

$$a \cdot b + \overline{a} \cdot c = (a + c) \cdot (\overline{a} + b)$$

$$(a + b) \cdot (\overline{a} + c) = a \cdot c + \overline{a} \cdot b$$
- 15) Fikir birliği Teoremi

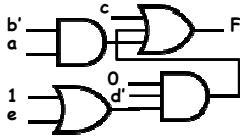
$$a \cdot b + b \cdot c + \overline{a} \cdot c = a \cdot b + \overline{a} \cdot c$$

$$(a + b) \cdot (b + c) \cdot (\overline{a} + c) = (a + b) \cdot (\overline{a} + c)$$

Cift ifade (Duality) Özelliği:

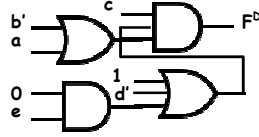
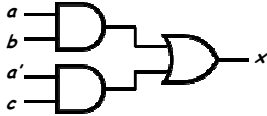
Bir Boole ifadesinde kullanılan değişkenler ve tümleyenleri aynı kalmak şartıyla VE işlemi yerine VEYA, VEYA işlemi yerine VE işlemi, "0" değeri yerine "1", "1" değeri yerine "0" yerleştirildiğinde elde edilen ifadeye ifadenin çifti adı verilir.

a, b, c, d, e değişkenlerini içeren $F = a \cdot b' + c + 0 \cdot d' \cdot (1 + e)$ ifadesi ve bu ifadenin çifti olan $F^D = (a + b') \cdot c \cdot (1 + d' + 0 \cdot e)$ ifadesi Çift ifade özelliği kullanılarak aşağıda gösterilmiştir.



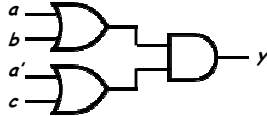
Çarpımların Toplamı

$$x = a \cdot b + a' \cdot c$$



Toplamların Çarpımı:

$$y = (a + b) \cdot (a' + c)$$



Örnek 5.1.

Bu örnekte, dağılma özelliğinin doğruluk tablosu ile gerçekleştirilen ispatı verilmiştir. Bu amaçla a, b, c değişkenlerine karşılık $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$ ifadesinin sol tarafına ilişkin ifadeler yazılır ve her iki tarafın birbirine eşit olduğu ifade edilir.

Tablo-5.9. $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$ işlemine ilişkin Doğruluk Tablosu

a	b	c	b · c	(a + b)	(a + c)	a + b · c	(a + b) · (a + c)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

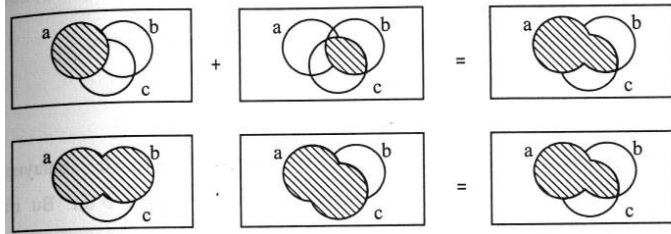
Örnek: $(a + \bar{b}) \cdot b = a \cdot b$ diğer gösterimle $(a + b')b = ab$
 $ab + b'b = ab$

$a \cdot \bar{b} + b = a + b$ diğer gösterimle $ab' + b = a + b$

$ab' + b(1 + a) = ab' + b + ab = a(b' + b) + b = (a + b)$

Örnek 5.2.

Bu örnekte, dağılma özelliğinin Venn diyagramları ile gerçekleştirilen ispatı verilmiştir. Bu amaçla a, b, c kümelerinden türetilen $a + b \cdot c$ ve $(a + b) \cdot (a + c)$ ifadelerinin Venn diyagramlarındaki karşılıkları verilerek her iki diyagramın birbirine eşit olduğu görülür.



Örnek 5.3.

Bu örnekte, $a + a \cdot b = a$ şeklinde verilen ifadenin doğruluğu Boole Cebri Aksiyom ve özellikleri kullanılarak ispatlanmıştır.

$$a + a \cdot b = a \cdot (1 + b) = a \cdot 1 = a$$

Örnek 5.6.

Bu örnekte, Fikir birliği Teoreminin $a + b \cdot a' \cdot c + b \cdot c = a + b \cdot a' \cdot c$ şeklinde verilen ifadesinin doğruluğu Boole Cebri Aksiyom ve özellikleri kullanılarak ispatlanmıştır. Bu amaçla, ifadenin sol tarafındaki $b \cdot c$ terimi $(a + a')$ ile çarpılırsa ifadenin değeri değişmez, ancak bu işlem ifadelerde ortak bileşenler oluşturur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} a \cdot b + a' \cdot c + b \cdot c &= a \cdot b + a' \cdot c + (a + a') \cdot b \cdot c \\ &= a \cdot b + a' \cdot c + a \cdot b \cdot c + a' \cdot b \cdot c \\ &= a \cdot b \cdot 1 + a \cdot b \cdot c + a' \cdot c \cdot 1 + a' \cdot c \cdot b \\ &= a \cdot b \cdot (1 + c) + a' \cdot c \cdot (1 + b) \\ &= a \cdot b + a' \cdot c \end{aligned}$$

Örnek:

Basitleştirme teoremlerinde verilen bazı ifadelerin doğruluğu Boole Cebri Aksiyom ve özellikleri kullanılarak ispatlanmıştır.

$$a \cdot b + a \cdot b' = a \quad a \cdot (b + b') = a$$

$$(a + b') \cdot b = a \cdot b \quad (a + b') \cdot b = a \cdot b + b' \cdot b = a \cdot b$$

$$a \cdot b' + b = a + b \quad a \cdot b' + b = a \cdot b' + b \cdot (1 + a) = a \cdot b' + b + a \cdot b = a \cdot (b' + b) + b = (a + b)$$

3.3. Boole Cebri Fonksiyonları ve Standart Biçimleri

$x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerine ve sabitlere, Boole Cebri'nin VE, VEYA ile DEĞİL işlemleri uygulanarak elde edilen **n-değişkenli** bir f fonksiyonuna **Boole Fonksiyonu** denir. Boole Fonksiyonlarını oluşturan her bir teriminde, değişkenlerin tamamının kendisi veya tümleyeninin olması gereken şekline fonksiyonun Kanonik biçimi denir. Boole Fonksiyonlarının, **Minimum Terimler Kanonik Biçimi** ve **Maksimum Terimler Kanonik Biçimi** olmak üzere iki temel biçimi bulunmaktadır. Bu biçimler doğruluk tablosundan doğrudan elde edilebilen ifadelerdir ve Boole fonksiyonunun indirgenmiş, en yalın ifadeleri şeklindedir.

3.3.1. Minimum ve Maksimum Terimler

Tablo. İki değişkenli Boole Fonksiyonu için Minimum ve Maksimum terimler

a	b	Minterm	sembolik	Maksterm	sembolik
0	0	$\bar{a} \cdot \bar{b}$	m_0	$a + b$	M_0
0	1	$\bar{a} \cdot b$	m_1	$a + \bar{b}$	M_1
1	0	$a \cdot \bar{b}$	m_2	$\bar{a} + b$	M_2
1	1	$a \cdot b$	m_3	$\bar{a} + \bar{b}$	M_3

Tablo. Üç değişkenli Boole Fonksiyonu için Minimum ve Maksimum terimler

a	b	c	Minterm	sembolik	Maksterm	sembolik
0	0	0	$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$	m_0	$a + b + c$	M_0
0	0	1	$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c$	m_1	$a + b + \bar{c}$	M_1
0	1	0	$\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}$	m_2	$a + \bar{b} + c$	M_2
0	1	1	$\bar{a} \cdot b \cdot c$	m_3	$a + \bar{b} + \bar{c}$	M_3
1	0	0	$a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$	m_4	$\bar{a} + b + c$	M_4
1	0	1	$a \cdot \bar{b} \cdot c$	m_5	$\bar{a} + b + \bar{c}$	M_5
1	1	0	$a \cdot b \cdot \bar{c}$	m_6	$\bar{a} + \bar{b} + c$	M_6
1	1	1	$a \cdot b \cdot c$	m_7	$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$	M_7

3.3.2. Minimum Terimlerin Kanonik Biçimi

Minimum terimlerin toplamından oluşan ifadeye **Minimum Terimler Kanonik Biçimi** adı verilir. Bu ifadeye yer alan terimler çarpımlardan oluştuğu için Minimum Terimler Kanonik Biçimine, **Çarpımların Toplamı Kanonik Biçimi** adı da verilir. Minimum Terimler Kanonik Biçimi sembolik olarak m_i şeklinde gösterilebildiğinden, bir Boole fonksiyonuna ilişkin Minimum Terimler matematiksel ifadeyle $\sum m_i$ şeklinde gösterilir.

Pratikte ise kısaca m_i 'deki terim numarasıyla $\sum i$ şeklinde de gösterilir.

3.3.3. Maksimum Terimlerin Kanonik Biçimi

Maksimum terimlerin çarpımından oluşan ifadeye **Maksimum Terimler Kanonik Biçimi** adı verilir. Bu ifadeye yer alan terimler toplamlardan oluştuğu için Maksimum Terimler Kanonik Biçimine, **Toplamların Çarpımı Kanonik Biçimi** adı da verilir. Maksimum Terimler Kanonik Biçimi sembolik olarak M_i şeklinde gösterilebildiğinden, bir Boole fonksiyonuna ilişkin Maksimum Terimler matematiksel ifadeyle $\prod M_i$ şeklinde gösterilir. Pratikte ise kısaca M_i 'deki terim numarasıyla $\prod i$ şeklinde de gösterilir.

3.3.4. Doğruluk Tablosundan Kanonik Biçimlerin Bulunması

Verilen bir lojik fonksiyonda değişkenlerin aldıkları değerler yerine koyularak doğruluk tablosu elde edilir ve buradan minimum veya maksimum terimler kanonik biçimi oluşturulabilir. Doğruluk tablosunda "1" değerini alanlar toplanarak (VEYA) Minimum Terimler Kanonik Biçimi, "0" değerini alanlar çarpılarak (VE) Maksimum Terimler Kanonik Biçimi elde edilir.

Örnek 5.14.

a	b	c	$f(a,b,c)$	Minterm	Maksterm
0	0	0	1	$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$	-
0	0	1	1	$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c$	-
0	1	0	0	-	$a + \bar{b} + c$
0	1	1	0	-	$a + \bar{b} + \bar{c}$
1	0	0	1	$a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$	-
1	0	1	1	$a \cdot \bar{b} \cdot c$	-
1	1	0	0	-	$\bar{a} + b + c$
1	1	1	0	-	$\bar{a} + b + \bar{c}$

minimum terimler
 $f(a,b,c) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot c$

maksimum terimler
 $f(a,b,c) = (a + \bar{b} + c) \cdot (a + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + b + c) \cdot (\bar{a} + b + \bar{c})$

Örnek 5.8.

Bu örnekte, $F=a+b$ şeklinde verilen ifadenin Minimum Terimler Kanonik Biçimi elde edilecektir. Bu amaçla VEYA işleminin doğruluk tablosundan yararlanılır.

Tablo. $F=a+b$ Boole Fonksiyonu için doğruluk tablosu ve minimum terimler

a	b	$F=a+b$	$Minterm$	$sembolik$
0	0	0	$\bar{a} \cdot \bar{b}$	m_0
0	1	1	$\bar{a} \cdot b$	m_1
1	0	1	$a \cdot \bar{b}$	m_2
1	1	1	$a \cdot b$	m_3

Minimum Terimler Kanonik Biçimine ilişkin ifade yazılırken, fonksiyonu "1" yapan minimum terimler alınır ve bu terimlerin toplamı Minimum Terimler Kanonik Biçimini oluşturur.

$$F=a+b=\bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b} + a \cdot b = m_1 + m_2 + m_3 = \sum(1,2,3)$$

Örnek 5.9.

Bu örnekte, $f(a,b,c)=a \cdot b + \bar{a} \cdot c$ şeklinde verilen fonksiyonun Minimum Terimler Kanonik Biçimi elde edilecektir. Bu amaçla "Shannon teoremi" yazılarak,
 $f(a,b,c) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot f(0,0,0) + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot f(0,0,1) + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \cdot f(0,1,0) + \bar{a} \cdot b \cdot c \cdot f(0,1,1)$
 $+ a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot f(1,0,0) + a \cdot \bar{b} \cdot c \cdot f(1,0,1) + a \cdot b \cdot \bar{c} \cdot f(1,1,0) + a \cdot b \cdot c \cdot f(1,1,1)$
fonksiyonu göz önüne alınır. Bu fonksiyondaki her bir f değeri aşağıdaki gibi belirlenir.

$$f(0,0,0) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

$$f(0,0,1) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1$$

$$f(0,1,0) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

$$f(0,1,1) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1$$

$$f(1,0,0) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

$$f(1,0,1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0$$

$$f(1,1,0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 + 0 = 1$$

$$f(1,1,1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1 + 0 = 1$$

$f(a,b,c)$ fonksiyonunda, değeri "1" olan f değerleri olan alınır ve bu terimlerin toplamı Minimum Terimler Kanonik Biçimini oluşturur.

$$f(a,b,c) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot c = m_1 + m_3 + m_6 + m_7 = \sum(1,3,6,7)$$

Örnek 5.10.

Bu örnekte, $F=a \cdot b$ şeklinde verilen ifadenin Maksimum Terimler Kanonik Biçimi elde edilecektir. Bu amaçla VE işleminin doğruluk tablosundan yararlanılır.

Tablo. İki değişkenli Boole Fonksiyonu için Minimum ve Maksimum terimler

a	b	$F=a \cdot b$	$Maksterm$	$sembolik$
0	0	0	$a + b$	M_0
0	1	0	$a + \bar{b}$	M_1
1	0	0	$\bar{a} + b$	M_2
1	1	1	$\bar{a} + \bar{b}$	M_3

Maksimum Terimler Kanonik Biçimine ilişkin ifade yazılırken, fonksiyonu "0" yapan Maksimum terimler alınır ve bu terimlerin toplamı Maksimum Terimler Kanonik Biçimini oluşturur.

$$F=a \cdot b=(a+b) \cdot (a+\bar{b}) \cdot (\bar{a}+b)=M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 = \prod(0,1,2)$$

Örnek 5.11.

Bu örnekte, $f(a,b,c)=a \cdot b + \bar{a} \cdot c$ şeklinde verilen fonksiyonun Maksimum Terimler Kanonik Biçimi elde edilecektir. Bu amaçla "Shannon teoremi" yazılarak,
 $f(a,b,c) = [a + b + c + f(0,0,0)] \cdot [a + b + \bar{c} + f(0,0,1)] \cdot [a + \bar{b} + c + f(0,1,0)]$
 $\cdot [a + \bar{b} + \bar{c} + f(0,1,1)] \cdot [\bar{a} + b + c + f(1,0,0)] \cdot [\bar{a} + b + \bar{c} + f(1,0,1)]$
 $\cdot [\bar{a} + \bar{b} + c + f(1,1,0)] \cdot [\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + f(1,1,1)]$
fonksiyonu göz önüne alınır. Bu fonksiyondaki her bir f değeri aşağıdaki gibi belirlenir.

$$f(0,0,0) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

$$f(0,0,1) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1$$

$$f(0,1,0) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

$$f(0,1,1) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1$$

$$f(1,0,0) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

$$f(1,0,1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0$$

$$f(1,1,0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 + 0 = 1$$

$$f(1,1,1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1 + 0 = 1$$

$f(a,b,c)$ fonksiyonunda, değeri "0" olan f değerleri olan alınır ve bu terimlerin çarpımı Maksimum Terimler Kanonik Biçimini oluşturur.

$$f(a,b,c) = [a + b + c] \cdot [a + \bar{b} + c] \cdot [\bar{a} + b + c] \cdot [\bar{a} + b + \bar{c}]$$

$$= M_0 \cdot M_2 \cdot M_4 \cdot M_5 = \prod(0,2,4,5)$$

3.3.5. Kanonik Biçimler Arasındaki Dönüşüm

Minimum Terimler Kanonik Biçimi verilen bir ifadenin Maksimum Terimler Kanonik Biçimini bulmak veya bunun tersini gerçekleştirmek mümkündür. Bu dönüşüm işlemi, DeMorgan yasası kullanılarak fonksiyonun tümleyeni elde edilerek gerçekleştirilir.

Örnek 5.12.

Bu örnekte, $f(a,b,c) = \sum(1,3,5,7)$ şeklinde Minimum Terimler Kanonik Biçimi verilen fonksiyonun Maksimum Terimler Kanonik Biçimi elde edilecektir. Bu amaçla öncelikle terimlerin tümleyeni olan fonksiyonu yazılır.

$$\overline{f(a,b,c)} = \sum(0,2,4,6) = m_0 + m_2 + m_4 + m_6$$

Bu ifade, De Morgan Kuralı kullanılarak farklı bir şekilde yazılabilir.

$$f = \overline{(m_0 + m_2 + m_4 + m_6)} = \overline{m_0} \cdot \overline{m_2} \cdot \overline{m_4} \cdot \overline{m_6}$$

Minimum terimlerin tümleyeni yerine Maksimum Terimler yazılır.

$$f = \overline{m_0} \cdot \overline{m_2} \cdot \overline{m_4} \cdot \overline{m_6} = M_0 \cdot M_2 \cdot M_4 \cdot M_6 = \prod(0,2,4,6)$$

Bu şekilde Maksimum Terimler Kanonik Biçimi elde edilir.

Minimum Terimler ile Maksimum Terimler arasındaki dönüşüm, $\overline{m_i} = M_i$ şeklinde gösterilebilir.

3.4. Lojik Kapı Sembolleri

Boole işlemlerini grafik olarak göstermek için ANSI (Amerikan Ulusal Standartları Enstitüsü, American National Standards Institute), IEC (Uluslararası Elektroteknik Komisyon, International Electrotechnical Commission) ve DIN (Alman Standartları Enstitüsü) olmak üzere değişik standartlar kullanılır.

Temel lojik kapıların grafik sembolleri

Kapı	ANSI	IEC	DIN
Tampon (Buffer)			
DEĞİL (NOT)			
VE (AND)			
VEYA (OR)			

Diğer lojik kapıların grafik sembolleri

Kapı	ANSI	IEC	DIN
VEDEĞİL (NAND)			
VEYADEĞİL (NOR)			
ÖZEL VEYA (XOR)			
ÖZEL VEYADEĞİL (XNOR)			

VEDEĞİL (NAND) Kapısı, $F = \overline{A \cdot B}$



VEYADEĞİL (NOR), $F = \overline{A + B}$



ÖZEL VEYA (XOR), $F = A \oplus B$

Özel veya işlemi, sembolü $\{ \oplus \}$ aşağıda verilen şekilde tanımlanmıştır.

A	B	Z	$A \oplus B$
0	0	0	$0 \oplus 0 = 0$
0	1	1	$0 \oplus 1 = 1$
1	0	1	$1 \oplus 0 = 1$
1	1	0	$1 \oplus 1 = 0$



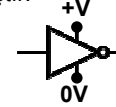
ÖZEL VEYADEĞİL (XNOR), $F = \overline{A \oplus B}$



A	B	Z	$A \oplus B$
0	0	1	$0 \oplus 0 = 1$
0	1	0	$0 \oplus 1 = 0$
1	0	0	$1 \oplus 0 = 0$
1	1	1	$1 \oplus 1 = 1$

Pozitif ve Negatif Lojik:

Boole cebirindeki lojik "0" ve "1" e karşılık fiziksel ortamda gerçek kapı devreleri giriş ve çıkışları belirli gerilim seviyeleri olur. Bu gerilim seviyelerine bağlı olarak pozitif lojik ve negatif lojik aşağıda verilen şekilde tanımlanmıştır.



Pozitif Lojik:

- Lojik "1" = Yüksek Seviye (H, High level), +V gerilimine yakın.
- Lojik "0" = Düşük Seviye (L, Low level), toprak 0V gerilimine yakın.

Negatif Lojik:

- Lojik "1" = Düşük Seviye (L, Low level), toprak 0V gerilimine yakın.
- Lojik "0" = Yüksek Seviye (H, High level), +V gerilimine yakın.